2. On a $1<\dfrac{x\ln x}{x-1}<1+\ln x\ \forall x>1$. En posant $x=1+\dfrac{1}{k}\ \forall k\in\mathbb{N}^*$ alors k >1 d'où

$$\forall k\in\mathbb{N}^*:1<\frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\frac{k+1}{k}-1}<1+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\text{ donc }\quad\forall k\in\mathbb{N}^*:1<(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)<1+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

3. On a $\forall k\in\mathbb{N}^*:1<(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)<1+\ln(k+1)-\ln k$ alors :

$$\left.\begin{array}{l}\text{pour k}=1:1<2\ln 2<1+\ln 2-\ln 1\\ \text{pour k}=2:1<3\ln\frac{3}{2}<1+\ln 3-\ln 2\\ \text{pour k}=3:1<3\ln\frac{4}{3}<1+\ln 4-\ln 3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \text{pour k}=n:1<(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)<1+\ln(n+1)-\ln(n)\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{on somme membre à membre on trouve :}\\ n<\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)<n+\ln(n+1)\text{ équivaut à}\\ 1<U_n<1+\frac{\ln(1+n)}{n}\text{ équivaut à}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}1\le\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\ln(1+n)}{n}\right]\\ \text{or }\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n)}{1+n}\cdot\frac{1+n}{n}=0\end{array}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

Exercice N°9: 1.a) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt-\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\left(\frac{t^{n+1}}{1+t}-\frac{t^n}{1+t}\right)dt=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}(t-1)dt$ or pour tout $t\in[0;1]$ la fonction : $t\mapsto\dfrac{t^n}{1+t}(t-1)$ est continue et négative. Donc $I_{n+1}-I_n\le 0$.

b) $0\le t\le 1\Leftrightarrow 1\le t+1\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{t+1}\le 1\ or\ t>0\ alors\ t^n>0\ donc\ \frac{t^n}{2}\le\frac{t^n}{1+t}\le t^n$ comme les trois fonctions :

$t\mapsto\dfrac{t^n}{2};\ t\mapsto\dfrac{t^n}{1+t}\ et\ t\mapsto t^n$ sont continues sur [0 ; 1] alors $\int_0^1\frac{t^n}{2}dt\le\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt\le\int_0^1 t^n dt$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2(n+1)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0\ donc\ \lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

2. $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{t^{n+1}}{1+t}dt+\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt=\int_0^1\left(\frac{t^{n+1}}{1+t}+\frac{t^n}{1+t}\right)dt=\int_0^1\frac{t^n}{1+t}(t+1)dt=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n+1}$

3.a) $k\le t\le k+1\Rightarrow\dfrac{1}{t}\le\dfrac{1}{k}\Rightarrow\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\le\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt=\frac{1}{k}$

b) $\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\le\frac{1}{k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{k=n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\le\sum_{k=1}^{k=n}\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt\Rightarrow\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\le\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\underbrace{\int_k^{k+1}dt}_{=1}$

$\Rightarrow[\ln x]_1^{n+1}\le\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\Rightarrow\ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}\ or\ \lim\limits_{n\to+\infty}\ln(1+n)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}=+\infty$

4) $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}I_k$ d'après 1-b) on a : $\dfrac{1}{2(k+1)}\le I_k\le\dfrac{1}{k+1}\Rightarrow\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{2(k+1)}\le\sum_{k=0}^{k=n-1}I_k\le\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{k+1}$ or d'après 3-a)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=}^{k=n-1}\dfrac{1}{k+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

Exercice N°10 : $f_n'(x)=\dfrac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{kx^k}{k}=\frac{1}{x-1}+1+x+\ldots+x^{n-1}>0$

x	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	+
$f_n(x)$	$-\infty$ ‖	$+\infty$

Qarray.tn - Aqua Blech- Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...